

SIK2005 Strømning og transportprosesser

Kompressibel strømning

Rørstrømning

Både i forbindelse med vår naturgassproduksjon på kontinentalsokkelen og i miljøsammenheng er strømningsberegninger på gass av stor betydning. Det er derfor ønskelig å utvide emnet noe i forhold til det som er angitt i Geankoplis.

Basis for kompressibel strømning er som for det inkompressible tilfellet, bevegelsesligningene, eller for endimensjonal strømning, energiligningen. Antas det turbulent strømning med $\alpha = 1$, kan denne på differensiell form skrives

$$v \, dv + g \, dz + \frac{dP}{\rho} + dW_s + dF = 0$$

La oss nå konsentrere oss om rørstrømning hvor arbeid ikke utføres og hvor høydedifferanser blir av underordnet betydning. Dette siste er ofte tilfelle for gasstrømning på grunn av lav tetthet. Altså med $g \, dz = 0$, $dW_s = 0$ og med

$$dF = 4 f \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \frac{1}{D} \cdot dL$$

får vi:

$$v \, dv + \frac{dP}{\rho} + 4 f \cdot \frac{v^2}{2} \cdot \frac{dL}{D} = 0$$

Denne ligningen kan ikke integreres direkte da både v og P vil variere med L . Imidlertid kan vi introdusere massestrømmen pr. m^2 rørtverrsnitt G . Denne vil være konstant så lenge tverrsnittet er konstant.

$$G = \frac{\text{massestrøm}}{\text{rørtverrsnitt}} = v \cdot r = \frac{v}{V} \quad \text{eller} \quad v = V \cdot G$$

Både V og v endres nedover et rør, men produktet er konstant. (Husk $V = 1/V$).
Innsatt og med deling på V^2 gir dette:

$$G^2 \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dP}{V} + \frac{4 f \cdot G^2}{2D} dL = 0 \dots (2.11-5)$$

Nå har vi fått fjernet den variable koeffisienten foran dL og det eneste som står igjen er å finne en relasjon mellom P og V . (I parentes: f er også konstant da $Re = GD/\mu = \text{konst.}$)

Integrerer mellom posisjonene 1 og 2

$$G^2 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) + \int_1^2 \frac{dP}{V} + 2f \cdot G^2 \cdot \frac{\Delta L}{D} = 0$$

Integral-leddet vil variere etter hva slags tilstandsendring man har.

Isoterm strøm av ideell gass

$$PV = \frac{RT}{M} \Rightarrow \frac{1}{V} = \frac{P \cdot M}{RT} = r$$

innsatt og integrert

$$G^2 \ln \frac{V_2}{V_1} + \frac{M}{2RT} (P_2^2 - P_1^2) + 2f G^2 \frac{\Delta L}{D} = 0$$

Og da $pV = \text{konstant}$, siden T er konstant:

$$G^2 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) + \frac{M}{2RT} (P_2^2 - P_1^2) + 2f G^2 \frac{\Delta L}{D} = 0 \dots (2.11-8 \text{ i Geankoplis})$$

Eksempel

Pumping av gass i rørledning på havbunnen er ofte tilnærmet isoterm idet varmetapet til sjøvannet gjør at gassen snart stiller seg inn på sjøvannets temperatur.

Beregn trykkfallet i en rørledning på 10 km, med ID = 0.6 m som frakter 50 m³/s av metan (regnet ved 288 K og 100 kPa). Transporten antas isoterm ved 6°C og starttrykket er 3000 kPa. Anta ideell gass. $M_{\text{CH}_4} = 16$ og $\mu = 0,011 \cdot 10^{-3} \text{ kg/m} \cdot \text{s}$, $e/D = 0.001$.

Massestrøm av metan

$$G = \frac{50 \cdot r}{A_{\text{rør}}} = 50 \cdot \frac{M \cdot P}{RT} \cdot \frac{1}{A_{\text{rør}}} = 50 \cdot \frac{0.016 \cdot 100000}{8.314 \cdot 288} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{4} \cdot 0.6^2} = 118.2 \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}$$

$$Re = \frac{G \cdot D}{\mu} = \frac{118.2 \cdot 0.6}{0.011 \cdot 10^{-3}} = 6.5 \cdot 10^6$$

Ved $e/D = 0.001$ er $f = 0.005$

$$2f \cdot G^2 \cdot \frac{\Delta L}{D} = 0.01 \cdot (118.2)^2 \cdot \frac{10000}{0.6} = 2.28 \cdot 10^6 \text{ kg}^2 / \text{m}^4 \cdot \text{s}^2$$

Får da:

$$G^2 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) + \frac{M}{2RT} (P_2^2 - P_1^2) = -2.28 \cdot 10^6$$

I utgangspunktet fordrer dette prøve/feile løsning, eventuelt løsning i feks Matlab. Som vi har vært inne på for inkompressibel strømming så kan ofte det kinetiske leddet neglisjeres ($G^2 \ln(P_1/P_2) \approx 0$). Dette kan også være tilfelle for gass-strømming om ikke hastighetene er for høye.

Får da:

$$P_2^2 - P_1^2 = \frac{2RT}{M} \cdot (-2.28 \cdot 10^6)$$

$$P_2 = \sqrt{(3 \cdot 10^6)^2 - (2 \cdot 8314 \cdot 279 \cdot 2.28 \cdot 10^6 / 16)} = 2887 \text{ kPa}$$

Må så se om vår antakelse om neglisjerbar kinetisk energi stemmer:

$$G^2 \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) = 540 \ll 2.28 \cdot 10^6$$

Faktisk er trykktapet så lite at en inkompressibel beregning ville ha vært tilstrekkelig. (Bruk da midlere tetthet.)

Kritisk trykkfall.

Når trykkfallet i et rørstrekk eller over en innsnevring blir høyt, kan gassens hastighet nå lydhastigheten (sonisk hastighet). Vi snakker da om kritisk eller strupet strømming.

Isotermt.

$$G^2 \cdot \ln \frac{P_1}{P_2} + \frac{M}{2RT} (P_2^2 - P_1^2) + \frac{l}{2} \cdot G^2 \cdot \frac{\Delta L}{D} = 0$$

La oss se hva som skjer med strømningsraten G når trykkfallet øker, dvs når P_2 minker. Når $P_1 = P_2$ blir $G = 0$. Dette er innlysende og trivielt. Imidlertid er grenseverdien for G når $P_2 \rightarrow 0$ også 0 (løs ligningen mhp. G^2 og bruk L'Hospitals regel).

→ Siden vi ved alle andre P_2 har en G som ikke er 0 så må et maksimum eksistere mellom $P_2 = P_1$ og $P_2 = 0$.

Deler ligningen på G^2 og deriverer mhp. P_2 . Legg merke til at friksjonsleddet faller bort. Altså er det trykkfallet som bestemmer om man får kritisk strømming, og den maksimale strømmingen er uavhengige av friksjonen i ledningen:

$$-\frac{1}{P_2} + \frac{1}{G^2} \cdot \frac{M}{2RT} \cdot (2P_2) + \frac{M}{2RT} \cdot (P_2^2 - P_1^2)(-2)G^{-3} \cdot \frac{dG}{dP_2} = 0$$

Maksimum finnes for $dG/dP_2 = 0$ (merkede verdier for maksimum)

$$\Rightarrow \frac{1}{P_2'} = \frac{1}{G'^2} \cdot \frac{M}{2RT} \cdot 2P_2' \Rightarrow G'^2 = \frac{M}{RT} \cdot P_2'^2$$

Her er P_2' det trykket som gir maksimal strømming G' . Nå er

$$P_1 V_1 = \frac{RT}{M} = P_2' V_2' \quad (\text{isotermt})$$

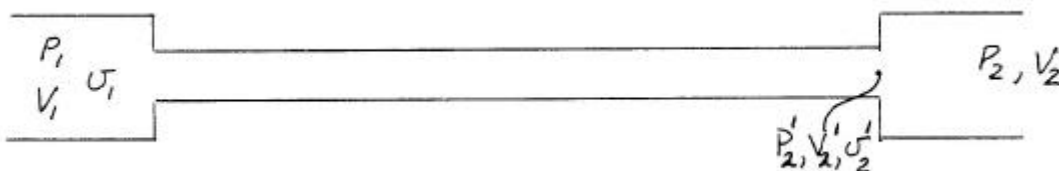
$$G'^2 = \frac{P_2'}{V_2'}$$

og hastigheten blir:

$$v \cdot r = \frac{v}{V} = G \Rightarrow G' = \frac{v_2'}{V_2'}$$

$$v_2' = \sqrt{P_2' \cdot V_2'}$$

Dette er den maksimale strømningshastigheten som kan oppnås ved isotherm drift. Den kalles ofte "isotherm lydshastighet" selv om den ikke eksakt er lik lydshastigheten under de gitte forhold. Trykket P_2' kan finnes ved å sette inn for G ($G'^2 = P_2'/V_2'$) i energiligningen øverst og løse for P_2' .



Hvis $P_2 < P_2'$ kalles trykkfallet overkritisk og strømningshastigheten gis av hastigheten v_2' uansett verdien på P_2 .

Isentropisk strømning

Isentropisk strømning vil si adiabatisk friksjonsfri strømning. Man kan tro at dette er et skjeldent forekommende tilfelle, men ofte er friksjonen i gass-strømmer relativt liten og man kan starte med en isentropisk tilnærming og deretter innføre korreksjonsfaktorer; noe vi skal se på senere.

I det ideelle tilfellet at strømningen er adiabatisk og reversibel har vi:

$$P \cdot V^{\gamma} = \text{konst.}$$

Her er $\gamma = C_p/C_v$. Integrerer vi dP/V får vi:

$$\int_1^2 \frac{dP}{V} = \frac{\gamma}{\gamma + 1} \cdot \frac{P_1}{V_1} \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma}} - 1 \right]$$

samtidig som

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Innsatt i energiligningen gir dette:

$$G^2 \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \ln \left(\frac{P_1}{P_2} \right) + \frac{\gamma}{\gamma + 1} \cdot \frac{P_1}{V_1} \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma}} - 1 \right] + 2 f G^2 \frac{\Delta L}{D} = 0$$

Skal isentropisk strømning realiseres må friksjonsleddet være lik 0.

På samme måte som for isoterm strømning kan dette vises å gi en maksimal hastighet

$$v_2 = \sqrt{\gamma \cdot P_2 \cdot V_2}$$

Her er P_2 og V_2 henholdsvis det trykk og det spesifikke volum som gir kritisk(sonisk) hastighet, og derved maksimal massestrøm. Denne hastigheten tilsvarer lydhastigheten under de gitte forhold (P_2 , V_2). Vi har altså sonisk strømning.

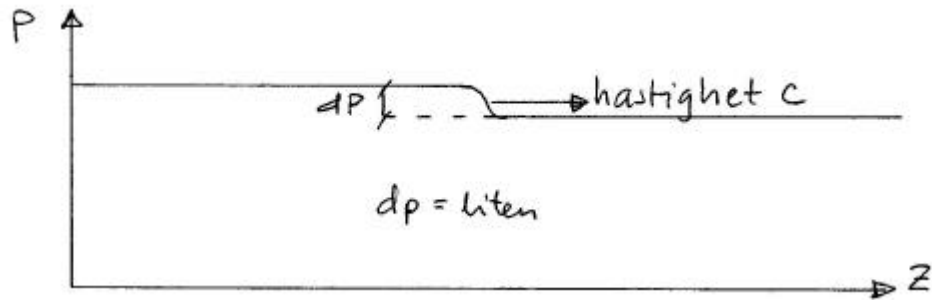
Adiabatisk strømning

For adiabatisk strømning hvor vi også har friksjon kan man få et tilnærmet riktig svar ved å bruke

ligningene for isentropisk strømning med γ som angitt, og så inkludere friksjonsleddet. Man bør ellers bruke $P \cdot V^k = \text{konst.}$ hvor $1 < k < \gamma$, som kalles polytropisk endring. Imidlertid er k normalt ikke kjent. En alternativ måte å løse problemet på er gitt i Coulson & Richardson, vol 1, men tas ikke med her.

Lydhastigheten

Lydhastigheten er forplantningshastigheten til en trykkfront av infinitesimal styrke. Dette vil si at endringen over trykkfronten er tilnærmet reversibel.



Alle gassens egenskaper vil endre seg over denne trykkfronten

$T + dT$		T
$v + dv = dv$		$v = 0$
$V + dV$		V
$P + dP$		P
	front	

La oss tenke oss et lite kontrollvolum lagt rundt denne fronten og at vårt akse-system beveger seg med frontens hastighet. La nå samtidig fronten bevege seg inn i et stillestående fluid. Da blir bildet:

$T + dT$			T
$v = c - dv$			$v = c$
$V + dV$			V
$P + dP$			P
	front		

Våre balanseligninger må gjelde

Kontinuitet:

$$G = \frac{c}{V} = \frac{c - dv}{V + dV} \quad (1)$$

Impuls:

$$P \cdot A - (P + dP) \cdot A = \frac{Ac}{V} \cdot (c - dv - c) \quad (2)$$

generert = ut - inn

Impulsbalansen gir:

$$dP = \frac{cdv}{V} \quad (3)$$

Eliminerer dv mellom impuls og massebalanse:

$$c^2 = - \frac{V^2 dP}{dV} \quad (4)$$

Nå er forplantningshastigheten av en trykkbølge relatert til et fluids elastisitetsmodul

$$e = \frac{\text{endring i spenning i fluidet}}{\text{resulterende relative volumendring}} = \frac{dP}{-\left(\frac{dV}{V}\right)}$$

$$e = -V \cdot \frac{dP}{dV} \quad (5)$$

(4) og (5) gir:

$$-\frac{dP}{dV} = \frac{e}{V} = \frac{c^2}{V^2} \quad (6)$$

eller

$$c = \sqrt{e \cdot V} \quad (7)$$

Settes $\rho = 1/V$ og benyttes $dP/dV = (d\rho/dV) (dP/d\rho)$ fås:

$$c = \sqrt{-\frac{V^2 dP}{dV}} = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} \quad (8)$$

c er altså her lydshastigheten.

Denne utledningen gjelder bare for infinitesimale dP, altså for isentropiske forhold slik at den korrekte ligning blir:

$$c^2 = \left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_s$$

For normale trykkfronter vil vi alltid ha irreversibiliteter slik at $\rho \neq 0$ over fronten.

Strømning i varierende tverrsnitt

Vi skal nå se på hvordan et kompressibelt medium oppfører seg i rør med varierende tverrsnitt, f.eks. dyser. Bruker da kontinuitetsligningen generelt eller vi kan derivere den:

$$\rho \cdot v \cdot A = \text{konst.}$$

$$v \cdot A \cdot d\rho + \rho \cdot A \cdot dv + \rho \cdot v \cdot dA = 0$$

Deler på $\rho \cdot v \cdot A$

$$\frac{dA}{A} + \frac{dv}{v} + \frac{dr}{r} = 0 \quad (9)$$

og bruker denne sammen med energiligningen for isentropisk strømning

$$\frac{dP}{\rho} + v dv = 0 \quad (\text{neglisjerer } g dz) \quad (10)$$

eliminerer dP og $d\rho$ fra (8), (9) og (10) og innfører $Ma = \text{mach tallet} = v/c$

$$\frac{dv}{v} = \frac{dA}{A} \left(\frac{1}{Ma^2 - 1} \right) \quad (11)$$

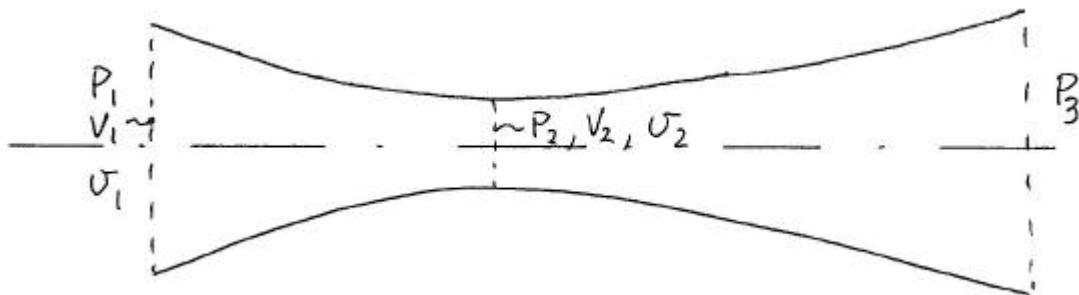
Dette er en ligning som viser hvordan hastigheten endrer seg i et rør når tverrsnittet forandres. Når $Ma < 1$, dvs for underlydshastigheter (subsoniske forhold), vil nevneren på høyre side være negativ og gashastigheten vil øke med minkende tverrsnitt. Dette er intuitivt riktig. Er imidlertid $Ma > 1$ så vil nevneren på høyre side bli positiv og vi ser da at hastigheten øker når tverrsnittet øker.

$Ma < 1 \rightarrow \text{synkende } A \text{ gir økende } v$

$Ma > 1 \rightarrow \text{økende } A \text{ gir økende } v$

Og for i det hele tatt å oppnå supersoniske hastigheter, overlydshastigheter, så må vi ha kritisk strømning et eller annet sted. Fra dette punktet må tverrsnittet ekspandere.

Ser på isentropisk strømning i dysen gitt i figuren.



Setter opp energiligningen (10), og integrerer mellom snitt 1 og 2. Tar ikke med friksjonsleddet til å begynne med. Dyser er i utgangspunktet utformet for å ha minimal friksjon og vi justerer for friksjon til slutt med en konstant.

$$\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} + \int_1^2 v dP = 0$$

Antas nå at $v_1^2 \ll v_2^2$ og integreres $V dP$ under isentropiske forhold, fås

$$v_2^2 = \frac{2g}{g-1} P_1 V_1 \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{(g-1)}{g}} \right]$$

og nødvendig tverrsnitt A_2 kan finnes fra kontinuitetsligningen

$$G'(kg/s) = konst.$$

$$A_2 = \frac{G' \cdot V_2}{v_2}$$

Hvis trykket P_3 er lavt nok, vil P_2 innta en minimumsverdi som korresponderer med sonisk strømming i trangeste tverrsnitt.

For en gitt G' vil det til ethvert trykkforhold, P_2/P_1 svare et nødvendig trangeste tverrsnitt. Hva skjer nå med A_2 når trykkforholdet synker?

$$A_2^2 = G'^2 \cdot \frac{V_1^2 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{-2}{g}}}{\frac{2g}{(g-1)} P_1 \cdot V_1 \left[1 - \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{(g-1)}{g}}\right]}$$

$$= \frac{G'^2 \cdot V_1 (g-1)}{2 P_1 g} \cdot \frac{w_g^{\frac{-2}{g}}}{\left[1 - w_g^{\frac{(g-1)}{g}}\right]}$$

Deriverer A_2^2 mhp. trykkforholdet $w = P_2/P_1$ og setter $dA_2^2/dw = 0$.
Finner da et ekstremalpunkt i

$$w_c = w = \left(\frac{2}{(g+1)}\right)^{\frac{g}{g-1}}$$

Dette er et minimum og A_2 går altså gjennom et minimum når w synker. Dette tilsvarer å finne maksimum G' når A_2 er gitt og w synker. Trykkforholdet som gir denne maksimale strømming kalles det kritiske trykkforholdet, w_c . Maksimal strømming finnes ved tilbakesubstitusjon i ligning

$$v_{2c} = \sqrt{g \cdot P_2 V_2}$$

(14) og den tilsvarende hastighet v_{2c} blir
som vi har sett tidligere er dette lydhastigheten.

Altså har gjennomstrømmningen G' et maksimum også for dyser, svarende til sonisk hastighet i trangeste tverrsnitt. Hastigheten vil derimot kunne stige videre inn i det supersoniske området som vi har sett. Ekspansjonen videre i en divergerende del av dysen er også tilnærmet isentropisk.

Isentropisk ekspansjon gjennom en dyse med både konvergerende og divergerende del kan da beskrives som:

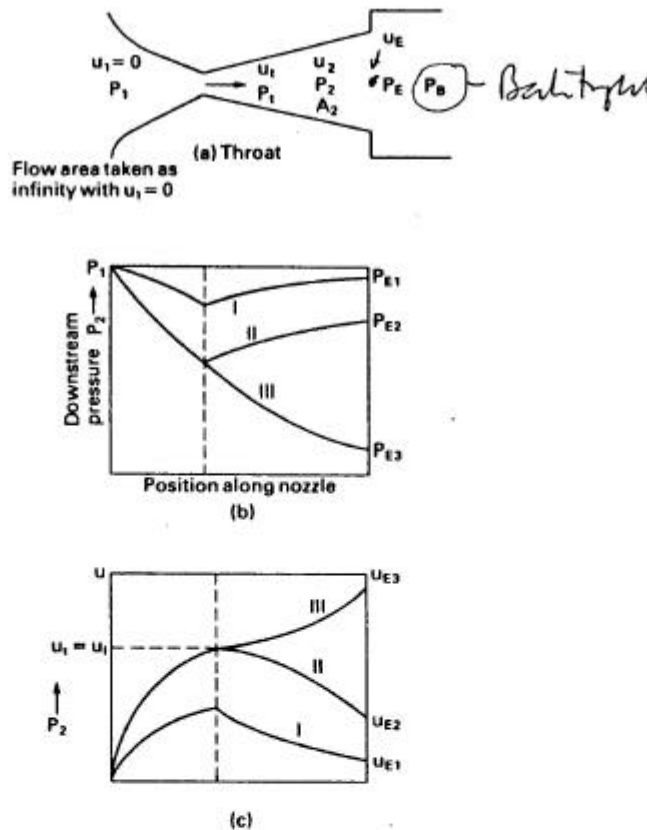
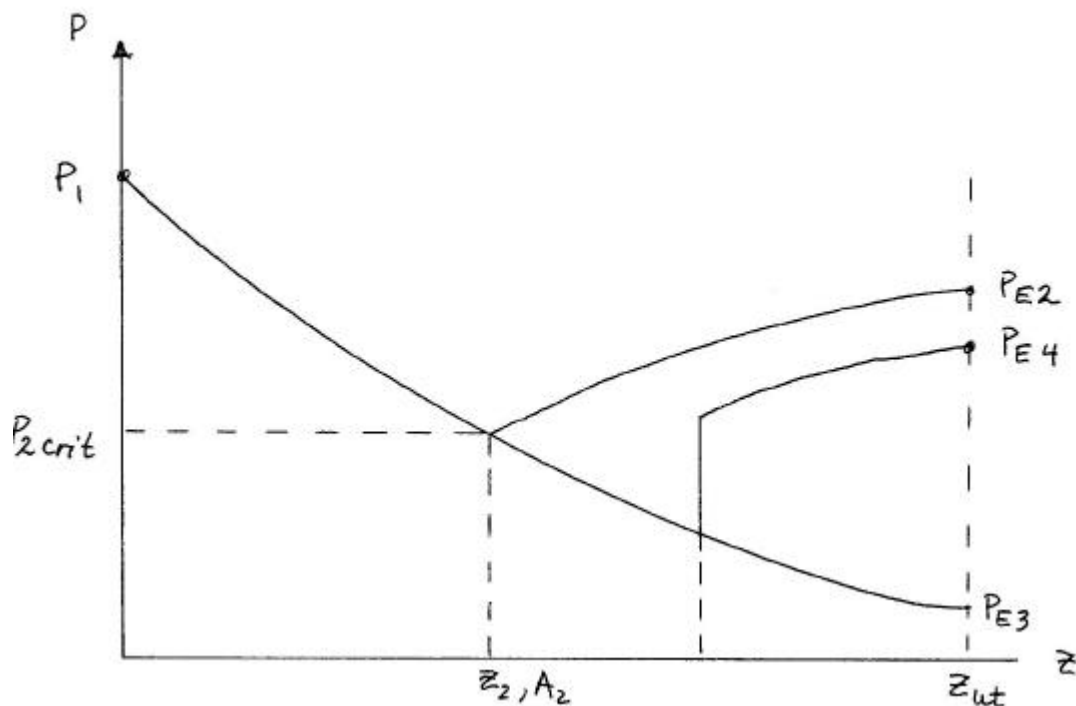


FIG. 4.5. Flow through converging-diverging nozzles.

- Case I.** Back-pressure P_B quite high. Curves I show how pressure and velocity change along the nozzle. The pressure falls to a minimum at the throat and then rises to a value $P_{E1} = P_B$. The velocity increases to maximum at the throat (less than sonic velocity) and then decreases to a value of u_{E1} at the exit of the nozzle. This situation corresponds to conditions in a venturi operating entirely at subsonic velocities.
- Case II.** Back-pressure reduced (curves II). The pressure falls to the critical value at the throat where the velocity is sonic. The pressure then rises to $P_{E2} = P_B$ at the exit. The velocity rises to the sonic value at the throat and then falls to u_{E2} at the outlet.
- Case III.** Back-pressure low, with pressure less than critical value at the exit. The pressure falls to the critical value at the throat and continues to fall to give an exit pressure $P_{E3} = P_B$. The velocity increases to sonic at the throat and continues to increase to supersonic in the diverging cone to a value u_{E3} .

Fra Coulson & Richardson; Chemical Eng., Vol. 1.

Hva skjer nå om nedstrømstrykket P_B ligger mellom P_{E2} og P_{E3} ? Da er P_B for høyt til å kunne gi en fullstendig isentropisk ekspansjon i den supersoniske delen og et trykksprang vil oppstå. Et slikt trykksprang kalles et sjokk eller en sjokkbølge.



Denne sjokkbølgen har en hastighet lik gasshastigheten i posisjon z , men motsatt rettet. Fronten vil altså stå i ro i forhold til dysen. Både på opp- og nedstrøms-siden av sjokkbølgen kan man regne isentropisk tilstandsending. Over sjokket er det irreversibiliteter slik at

$$S_{nedstr.} > S_{oppstr.}$$

Trykkendringen vil også føre en overgang fra supersonisk til subsonisk strømming. En annen mulighet er at strømmen i den divergerende delen beholder sin supersoniske karakter, men "løsner" fra veggene. Den blir da til et jetstrøm.